DISTANCIAS I

Ejercicio nº 1.-

Calcula la distancia entre los planos siguientes:

π: $y + 3z = 0$ π': $2y + 6z - 5 = 0$

Ejercicio nº 2.-

Calcula la distancia de $P(1, 0, -1)$ a la recta r: $(2\lambda, 1 - \lambda, -\lambda)$.

Ejercicio nº 3.-

Calcula la distancia entre:

$$r : \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \begin{cases} x = 4 - \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = \mu \end{cases}$$

dividiendo el volumen de un paralelepípedo entre el área de su base.

Ejercicio nº 4.-

Calcula la distancia entre los planos siguientes:

π: $x - 3y + z - 10 = 0$ π': $2x - 6y + 2z + 3 = 0$

Ejercicio nº 5.-

Calcula la distancia de $P(2, 1, -1)$ a la recta r: $(4\lambda, 1 - \lambda, \lambda)$.

Ejercicio nº 6.-

Dadas las rectas:

$$r_1 : \frac{x-2}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-1}{4}, \qquad r_2 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{1}$$

Halla:

a) La ecuación del plano que pasa por la segunda y es paralelo a la primera.

b) La distancia entre ambas rectas.

SOLUCIONES

Solución nº 1:

Los dos planos son paralelos pues los coeficientes de sus incógnitas son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

$P(0, 3, -1)$ es un punto del plano π.

Por tanto:

$$dist(\pi, \pi') = dist(P, \pi') = \frac{|6 + 6 \cdot (-1) - 5|}{\sqrt{4+36}} = \frac{5}{\sqrt{40}} = 0{,}79$$

Solución nº 2:

- Plano π que pasa por P y es perpendicular a r:

  Su vector normal es el vector dirección de la recta: $\vec{n} = (2, -1, -1)$. Pasa por P.

  Su ecuación es:

  $\pi: 2 \cdot (x-1) - y - 1 \cdot (z+1) = 0 \quad \to \quad \pi: 2x - y - z - 3 = 0$

- Intersección de π y r:

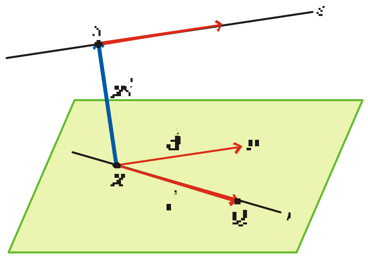
  Sustituimos las coordenadas de r en π:

$$2 \cdot (2\lambda) - (1-\lambda) + \lambda - 3 = 0 \;\to\; 6\lambda - 4 = 0 \;\to\; \lambda = \frac{2}{3} \;\to\; \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{-2}{3} \end{cases} \;\to P\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

- Distancia pedida:

$$dist(P, r) = dist(P, P') = \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}58$$

Solución nº 3:



$$dist(r, s) = dist(S, \text{plano } RPQ) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo definido por } \vec{RS}, \vec{d}, \vec{d'}}{\text{Área del paralelogramo definido por } \vec{d}, \vec{d'}} =$$

$$= \frac{\left|\left[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d'}\right]\right|}{\left|\vec{d} \times \vec{d'}\right|}$$

$$\left[\vec{RS}, \vec{d}, \vec{d'}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad \vec{d} \times \vec{d'} = (-2, -1, -1) \qquad \left|\vec{d} \times \vec{d'}\right| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$dist(r, s) = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}41$$

Solución nº 4:

Los dos planos son paralelos pues los coeficientes de sus incógnitas son proporcionales. Por tanto, la distancia entre ellos es la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro.

$P(1, 0, 9)$ es un punto del plano π.

Por tanto:

$$dist(\pi, \pi') = dist(P, \pi') = \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 9 + 3}{\sqrt{4 + 36 + 4}} = \frac{23}{\sqrt{44}} = 3{,}47$$

Solución nº 5:

1ª *forma:*

- Plano π que pasa por P y es perpendicular a r:

  Su vector normal es el vector dirección de la recta: $\vec{n} = (4, -1, 1)$. Pasa por P.

  Su ecuación es:

  $\pi: 4 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (y - 1) + (z + 1) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi: 4x - y + z - 6 = 0$

- Intersección de π y r:

  Sustituimos las coordenadas de r en π:

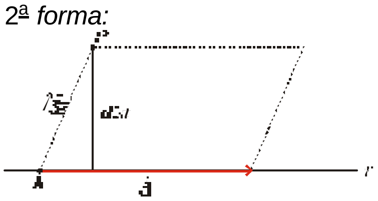
$$4 \cdot (4\lambda) - (1 - \lambda) + \lambda - 6 = 0 \quad \rightarrow \quad 16\lambda + \lambda + \lambda - 7 = 0 \quad \rightarrow \quad 18\lambda - 7 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{7}{18} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{14}{9} \\ y = \dfrac{11}{18} \\ z = \dfrac{7}{18} \end{cases} \quad \rightarrow \quad P'\left(\frac{14}{9}, \frac{11}{18}, \frac{7}{18}\right)$$

- Distancia pedida:

$$dist(P, r) = dist(P, P') = \sqrt{\left(2 - \frac{14}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{11}{18}\right)^2 + \left(-1 - \frac{7}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{738}}{18} = 1{,}5$$

2ª *forma:*



Recta $r: \begin{cases} R(0, 1, 0) \\ \vec{d}(4, -1, 1) \end{cases}$

Punto $P(2, 1, -1)$

$$dist(P, r) = \frac{\text{Área}}{\text{Base}} = \frac{\left|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\right|}{\left|\vec{d}\right|} \qquad \begin{cases} \overrightarrow{RP} \times \vec{d} = (-1, -6, -2) \\ \left|\overrightarrow{RP} \times \vec{d}\right| = \sqrt{1 + 36 + 4} = \sqrt{41} \\ \left|\vec{d}\right| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} \end{cases}$$

$$dist(P, r) = \frac{\sqrt{41}}{\sqrt{18}} = 1{,}5$$

Solución nº 6:

a) Hallamos el plano, π, que contiene a r_2 y es paralelo a r_1.

$$\left.\begin{matrix} (3, 2, 4) \parallel r_1 \\ (2, 3, 1) \parallel r_2 \end{matrix}\right\} \text{ Por tanto, } (3, 2, 4) \times (2, 3, 1) = (-10, 5, 5) \text{ es perpendicular a } \pi.$$

El punto $(1, -1, 3)$ es de r_2 y, por tanto, de π.

Ecuación de π:

$-10(x - 1) + 5(y + 1) + 5(z - 3) = 0 \quad \rightarrow \quad \pi: 2x - y - z = 0$

b) $$dist(r_1, r_2) = dist(r_1, \pi) = dist[(2, -3, 1), \pi] = \frac{|4 + 3 - 1|}{\sqrt{4 + 1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = 2{,}45$$